perquè els puguin comprovar. Podríem generar un full de treball Sage, o bé senzillament un fitxer amb instruccions per executar-lo en un terminal GNU/Linux i fer el projecte públic.

- Estem treballant amb un o més coautors en un fitxer Latex (potser amb alguns càlculs i tot) i no volem haver d'enviar-nos fitxers per correu electrònic. Els diferents autors podríem compartir el projecte i treballar amb tots els avantatges d'un bon control de canvis i sense voler configurar res. Val a dir que l'editor de Latex en línia és realment bo i disposa de previsualitzacions en directe per anar veient com queda el document de forma automàtica. Aquest mateix document l'estic escrivint a `cloud.sagemath.org`.

- Volem fer demostracions matemàtiques a classe i només diposem d'un navegador amb connexió a Internet. Connectant-nos al núvol podem accedir als fulls de treball i a les eines de `cloud.sagemath.org`.

- Volem crear documents que combinin càlculs i text de forma integrada i senzilla. Així, per exemple, si volem escriure en un document seixanta decimals de π escrivim directament al codi font la instrucció Latex `\sage{N(pi,digits=60)}` i obtindrem directament

  `3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974 94`

  sense haver de copiar cap número. Això va en la direcció del que Donald Knuth anomenava *literate programming* o documents que s'adaptin a fitxers de dades que poden canviar.

Les possibilitats que ofereix aquesta eina són difícils d'imaginar ara per ara, però de ben segur que en sentirem a parlar en els propers anys. Haurem d'estar-hi atents.

Joaquim Puig i Sadurní
Universitat Politècnica de Catalunya

Problemes

La idiosincràtica regularitat de distribució de la *SCM/Notícies* fa que, a vegades, la inestimable col·laboració dels nostres lectors s'acumuli en onades que, com ara en aquest número, arribin a les dimensions d'un tsunami. Hem rebut solucions de tots els problemes proposats fins ara i, de quasi tots, més d'una i més de dues!

Així doncs, cal agrair a Roberto de la Cruz Moreno, del Centre de Recerca Matemàtica, la seva solució al problema **A110** que publiquem, i la d'Esteve Casas Juncà, de l'Institut Baix Montseny de Sant Celoni.

El mateix Esteve Casas Juncà és l'autor de la solució publicada del problema **A114**, i n'hem rebut també la de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro de Lugo, a qui donem les gràcies per aquesta feina i d'altres que són en aquesta enumeració.

En el problema **A115** la situació és la inversa: publiquem la solució preparada per Bruno Salgueiro Fanego i donem constància que Esteve Casas Juncà n'ha enviat una altra.

El problema **A117** ha tingut quatre solucions, que devem a Daniel Văcaru de Piteşti, Romania (publicada), Joaquim Nadal i Vidal, de Llagostera, Bruno Salgueiro Fanego, i Miquel Amengual Covas de Cala Figuera, Mallorca.

Ara bé, la palma de la popularitat se l'emporta el problema **A118**, amb cinc solucions rebudes, els autors de les quals són Joaquim Nadal i Vidal (publicada), Daniel Văcaru, Bruno Salgueiro Fanego, Xavier Ros Otón, de la UPC i Gerard Planes Conangla, de la UPC.

Pel que fa al problema **A119**, de les dues solucions rebudes, les de Miquel Amengual Covas i Bruno Salgueiro Fanego, en publiquem la primera.

Finalment, publiquem l'única solució rebuda del problema **A120**, de Gerard Planes Conangla, que, notablement, millora una fita de l'enunciat.

I no podem deixar d'afegir la contribució de Bruno Salgueiro Fanego al problema **A116**, que va arribar quan la secció de problemes de la *SCM/Notícies* 34 ja estava tancada.

Ara toca agrair a Miquel Amengual Covas, José Luis Díaz-Barrero i Xavier Ros Otón la seva contribució en forma dels enunciats dels problemes **A121**, **A123** i **A124**.

Gràcies, doncs, a tothom! Aquesta secció no seria possible sense el treball de tots vosaltres. Hi insisteixo: el format Tex o Latex em fa la feina molt més senzilla i us demano, doncs, que si us va bé, em feu arribar els fitxers font `*.tex`. Naturalment totes les aportacions en qualsevol altre format, manuscrits inclosos, són benvingudes. L'adreça de correu és la de sempre: `carles.romero.c@gmail.com`. Fins a la propera!

Problemes proposats

A121. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Sigui $\triangle ABC$ un triangle amb $\widehat{C} = 2\widehat{B}$, sigui M el punt mitjà del costat BC, i sigui D el peu de la perpendicular des de C al costat AB. Suposem que $\overline{AM} = \overline{CD}$. Quant fa l'angle $\widehat{B}$?

A122. (Proposat per la redacció.)
El nombre 1210 té la propietat que les seves xifres es corresponen amb el nombre de zeros (1), d'uns (2), de dosos (1) i de tresos (0) en el propi nombre. Trobeu sis nombres més amb la mateixa propietat.

A123. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona)
Trobeu totes les solucions reals de l'equació

$$\left(\sqrt[5]{x^2+3x+2} - \sqrt[5]{2x^2+5x+7} + \sqrt[5]{4x^2+x+6}\right)^5 = 3x^2 - x + 1$$

A124. (Proposat per Xavier Ros Otón, UPC, Barcelona)
Sigui $f\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció definida en els punts del pla amb coordenades enteres. Suposem que el valor de la funció en tot punt és la mitjana aritmètica dels valors de la funció en els quatre punts adjacents a aquest, és a dir,

$$f(n,m) = \frac{f(n+1,m)+f(n-1,m)+f(n,m+1)+f(n,m-1)}{4}.$$

Demostreu que si f és acotada, aleshores és constant.

Solucions

A110. (Proposat per Xavier Ros Otón, UPC, Barcelona.)

Tenim una formiga situada en el punt $x = 0$ de la recta real. Aquesta formiga es mou amb passets de mida $1/n$ i, abans de fer cada passet, decideix aleatòriament si el fa cap la dreta o bé cap a l'esquerra. Quin és el nombre esperat de passets que haurà de fer la formiga per arribar a un dels dos extrems de l'interval $[-1, 1]$?

Solució: (Solució de Roberto de la Cruz Moreno, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra.)

Denotem per p_i, $i \in \{0, 1, ..., 2n\}$, el nombre esperat de passos que farà la formiga des de la posició $x = -1 + i/n$ per arribar a un dels extrems de l'interval i es tracta de calcular p_n. És immediat que $p_0 = p_{2n} = 0$ i, a més,

$$p_j = \frac{p_{j-1} + p_{j+1}}{2} + 1, \quad j \in \{1, 2, ..., (2n-1)\} \qquad (*)$$

que, en mode matricial, queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

i, en resoldre el sistema tridiagonal, ens queda $p_n = n^2$.

Annex: Per calcular p_n he optat per calcular p_1 mitjançant el *mètode de Cramer* i, a continuació, obtenir p_n a partir de la fórmula general de l'equació $(*)$:

i) Càlcul de p_1: sigui D_m el determinant de la matriu de coeficients del sistema, on $m = 2n-1$

indica l'ordre de la matriu. Quan desenvolupem aquest determinant per la primera fila ens queda la relació de recurrència

$$D_m = D_{m-1} - \frac{1}{4} D_{m-2}$$

que, juntament amb $D_1 = 1$ i $D_2 = 3/4$, dóna la fórmula general

$$D_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m (m+1).$$

D'altra banda, si substituïm la primera columna d'aquesta matriu per una columna d'uns (sigui A^1 el determinant d'aquesta nova matriu), en desenvolupar per aquesta primera columna s'obté que

$$\begin{aligned} A^1 &= D_{m-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^1 D_{m-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 D_{m-3} \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} D_1 = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} (m + (m-1) + \cdots + 1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^m (m+1)m \end{aligned}$$

i, amb la *regla de* **Cramer**,

$$p_1 = \frac{A^1}{D_m} = m = 2n - 1.$$

ii) Càlcul de p_n: amb el valor de p_1 es calcula $p_2 = 2(p_1 - 1) = 4n - 4$. D'altra banda, s'ha de tenir en compte que l'equació general de la relació de recurrència $(*)$ és $p_j = Aj + B - j^2$. En aplicar a aquesta equació les condicions inicials, s'obté que $A = 2n$ i $B = 0$ i, per tant, $p_n = 2n^2 - n^2 = n^2$.

A114. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Sigui P un punt interior a un triangle ABC de manera que $\widehat{ABP} = \widehat{PBC}$. Provau o refusau que P és l'incentre del triangle $\triangle ABC$ en cadascun dels dos casos següents:
a) $\widehat{BPC} = 90° + \widehat{BAP}$
b) $\widehat{BPC} = 90° + \widehat{PAC}$

Solució: (Solució d'Esteve Casas Juncà, Institut Baix Montseny, Sant Celoni.)
Justificarem que, en el primer cas, l'afirmació és certa, però que, en el segon, no ho és.
a) Cas $\widehat{BPC} = 90° + \widehat{BAP}$. Dividirem la demostració en dues parts: en la primera es veurà que l'incentre I del triangle compleix la condició exigida $90° + \widehat{BAI}$ i, en la segona, provarem la unicitat de la solució, tot tenint en compte que la condició exigida fa que l'angle $\widehat{BAP}$ no pugui ser obtús.
*a*1) Les línies que surten de cada vèrtex i es tallen a l'incentre I del triangle són les bisectrius dels angles del triangle, que, tots junts, sumen 180°. Per tant,

$$\widehat{ABI} + \widehat{BAI} + \widehat{ACI} = 90°.$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} \widehat{BIC} &= 360° - \left(180° - \widehat{ABI} - \widehat{BAI}\right) \\ &\quad - \left(180° - \widehat{ACI} - \widehat{BAI}\right) \end{aligned}$$

i, per tant

$$\begin{aligned} \widehat{BIC} &= \left(\widehat{ABI} + \widehat{ACI} + \widehat{BAI}\right) + \widehat{BAI} \\ &= 90° + \widehat{BAI} \end{aligned}$$

i l'incentre I del triangle compleix la condició exigida.
*a*1) Intuïtivament, ja es veu que quan el punt P s'allunya del vèrtex B, l'angle $\widehat{BAP}$ augmenta estrictament mentre que l'angle $\widehat{BPC}$ disminueix i que la igualtat demanada només s'assoleix en un punt. Suposem, però, que hi ha dos punts, P_1 i P_2, complint la igualtat exigida, de manera que $BP_2 > BP_1$, és a dir, $\widehat{BP_2C} < \widehat{BP_1C}$, ja que $\widehat{P_1CP_2} + \widehat{BP_2C} = \widehat{BP_1C}$. Però $\widehat{P_2AP_1} + \widehat{BAP_1} = \widehat{BAP_2}$ i, aleshores, $\widehat{BAP_2} + 90° = \widehat{P_2AP_1} + \widehat{BAP_1} + 90° = \widehat{P_2AP_1} + \widehat{BP_1C} > \widehat{BP_2C}$, que és una contradicció.
b) Cas $\widehat{BPC} = 90° + \widehat{PAC}$. Veurem que P no ha de ser necessàriament l'incentre del triangle: escollim un triangle isòsceles $\triangle ABC$ en què el costat desigual és el costat AC, i el punt P serà un punt qualsevol de l'altura (coincideix amb la bisectriu i la mitjana) que surt del vèrtex B. Sigui P_1 el peu d'aquesta mitjana sobre el costat AC; aleshores, el triangle $\triangle CP_1B$ és rectangle en P_1. Sigui P_2 la intersecció amb el costat CB de la perpendicular a l'altura (bisectriu) que passa per P. Aleshores, el segment AC és paral·lel al segment PP_2 i, per ser angles alterns interns, $\widehat{CPP_2} = \widehat{P_1CP}$. Però $\widehat{P_1CP} = \widehat{PAC}$ i, per tant, $\widehat{PAC} + 90° = \widehat{CPP_2} + 90° = \widehat{BPC}$. Resulta, doncs, que qualsevol punt P de la bisectriu (altura) per B, sigui l'incentre o no, compleix la condició demanada.

A115. (Proposat per Xavier Cabré i Xavier Ros, departament MA1, UPC, Barcelona.)
Per a una matriu simètrica i definida positiva, quin dels dos nombres és més gran, el seu determinant o el producte de tots els elements de la seva diagonal?

Solució: (Solució i notes de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.)
La resposta és: el producte de tots els elements de la seva diagonal. A més, aquests nombres són iguals si, i només si, la matriu donada és una matriu diagonal.
Sigui $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ una matriu real $n \times n$ simètrica i definida positiva. Com que A és definida positiva, $a_{ii} > 0$ per a $1 \le i \le n$. Sigui D la matriu diagonal que té el nombre $1/\sqrt{a_{ii}}$ com a element i-èssim de la diagonal i sigui $B = DAD$. Aleshores B és simètrica i definida positiva, els elements de la seva diagonal són tots iguals a 1 i

$$\begin{aligned}\det B &= (\det D)(\det A)(\det D)\\ &= (\det D)^2(\det A) = \frac{\det A}{\prod_{i=1}^n a_{ii}}.\end{aligned}$$

Per tant, demostrar l'afirmació de l'enunciat, que $\det A \le \prod_{i=1}^n a_{ii}$, equival a demostrar que $\det B \le 1$.
Siguin λ_i, $1 \le i \le n$, els autovalors de B, que són positius perquè B és definida positiva. Segons la desigualtat de les mitjanes geomètrica i aritmètica,

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \le \left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{n}\right)^n$$

o, el que és el mateix,

$$\det B \le \left(\frac{\operatorname{tr} B}{n}\right)^n$$

i, com que tots els elements de la diagonal principal de B són iguals a 1, resulta $\operatorname{tr} B = n$ i

$$\det B \le \left(\frac{n}{n}\right)^n = 1,$$

com volíem demostrar.
La igualtat s'esdevé si, i només si, hi ha igualtat entre les mitjanes geomètrica i aritmètica, és a dir, si $\lambda_i = 1$ per a tot $1 \le i \le n$. Com que B és hermítica i, per tant, diagonalitzable, això equival a que B és justament la matriu identitat. Per tant, la igualtat s'ateny si, i només si, A és una matriu diagonal.

Nota: Hom pot demostrar que el resultat anterior també és cert per a matrius complexes hermítiques i definides positives i que, en aquest cas, és equivalent al següent resultat, conegut com a *desigualtat matricial d'Hadamard*: «El valor absolut del determinat d'una matriu quadrada és més petit o igual que el producte de les longituds dels seus vectors columna, amb igualtat si, i només si, els vectors són ortogonals dos a dos o un d'ells, almenys, és zero». Vegeu, per exemple, el llibre de Leonid Mirsky, *An introduction to linear algebra* Oxford at the Clarendon Press, 1955, p. 416 i s. s. fins a Dover, 1990.
En el cas de matrius reals, la desigualtat matricial d'Hadamard té aquest significat geomètric: «D'entre tots els paral·lelepípedes de costats amb longituds donades, el de volum més gran és l'ortoedre».

A117. (Proposat per Juan-Bosco Romero Márquez †, Àvila)
Sigui $\triangle ABC$ un triangle rectangle en A amb costats $a > b \ge c$. Siguin $h_a = AH_a$ i $v_a = AV_a$ l'altura i la bisectriu corresponents a l'angle A, amb peus respectius a H_a i V_a sobre el costat BC. Siguin $n_a = BH_a$, $m_a = H_aC$, $n'_a = BV_a$ i $m'_a = V_aC$, amb $m_a + n_a = m'_a + n'_a = a$.
Demostreu que

$$a^2\sqrt{h_a v_a} \ge b^2\sqrt{n_a n'_a} + c^2\sqrt{m_a m'_a}$$

amb igualtat si, i només si, $b = c$.

Solució: (Solució de Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.)
La desigualtat es pot escriure així:

$$1 \ge \frac{b^2}{a^2}\sqrt{\frac{n_a n'_a}{h_a v_a}} + \frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{m_a m'_a}{h_a v_a}}. \qquad (*)$$

Segons el *teorema dels sinus*,

$$\frac{n'_a}{v_a} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin B} \quad \text{i} \quad \frac{m'_a}{v_a} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos B}$$

i, amb una mica més de trigonometria,

$$\frac{n_a}{h_a} = \cot B \quad \text{i} \quad \frac{m_a}{h_a} = \tan B.$$

Aleshores, la fórmula $(*)$ es pot escriure així:

$$1 \ge \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\sin^2 B\,\frac{\sqrt{\cos B}}{\sin B} + \cos^2 B\,\frac{\sqrt{\sin B}}{\cos B}\right)$$

és a dir,

$$\sqrt[4]{2} \ge \sin B\sqrt{\cos B} + \cos B\sqrt{\sin B},$$

o sigui,

$$\sqrt[4]{2} \ge \sqrt{\sin B\,\cos B}\left(\sqrt{\sin B} + \sqrt{\cos B}\right).$$

Ara hem de provar la desigualtat

$$\sqrt[4]{2} \geq \sqrt{xy}\,\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) \quad \text{amb} \quad x^2+y^2=1.$$

Tenim:

$$\sqrt{xy}\,\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) \leq \frac{x+y}{2}\,\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$$

i $x^2+y^2=1$ implica $(x+y)^2 \leq 2\,\left(x^2+y^2\right)=2$, o sigui

$$x+y \leq \sqrt{2}.$$

Amb això aconseguim:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 &= x+y+2\sqrt{xy}\\ &\leq 2(x+y) \leq 2\sqrt{2},\end{aligned}$$

que implica

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq \sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}.$$

Finalment,

$$\begin{aligned}\sqrt{xy}\,\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) &\leq \frac{x+y}{2}\,\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}\,\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{2},\end{aligned}$$

com volíem. La igualtat es dóna quan $h_a=v_a$.

A118. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona)
Siguin a b i c tres nombres reals i positius. Demostreu que

$$(a+b+c)\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right) \geq$$
$$\sqrt{abc}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right).$$

Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, la Selva.)
De

$$\frac{1}{2}\,\left(b(c-a)^2+c(a-b)^2+a(b-c)^2\right) \geq 0$$

s'obté, successivament,

$$\begin{aligned}0 \leq\ & \frac{1}{2}\,\left(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-6abc\right)\\ &= \frac{1}{2}\,\big((2a^2b+2a^2c-ab^2-ac^2-2abc)\\ &\quad +(2b^2a+2b^2c-ba^2-bc^2-2abc)\\ &\quad +(2c^2a+2c^2b-ca^2-cb^2-2abc)\big)\\ &= \frac{1}{2}\,\big(a(b+c)(2a-b-c)\\ &\quad +b(c+a)(2b-c-a)\\ &\quad +c(a+b)(2c-a-b)\big)\\ &= a(b+c)\left(a-\frac{b+c}{2}\right)\\ &\quad +b(c+a)\left(b-\frac{c+a}{2}\right)\\ &\quad +c(a+b)\left(c-\frac{a+b}{2}\right).\end{aligned}$$

Ara apliquem el fet que la mitjana geomètrica és més petita o igual que la mitjana aritmètica i obtenim

$$\begin{aligned}a(b+c)\left(a-\sqrt{bc}\right)+b(c+a)\left(b-\sqrt{ca}\right)\\ +c(a+b)\left(c-\sqrt{ab}\right) \geq 0,\end{aligned}$$

i, a partir d'aquí, en operar, passar termes a la dreta, afegir $3abc$ a ambdós costats i entrar factors a dintre dels radicals, queda

$$\begin{aligned}&a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+3abc\\ &\quad \geq 3abc+(b+c)\sqrt{a^2bc}\\ &\qquad +(c+a)\sqrt{ab^2c}+(a+b)\sqrt{abc^2}\,,\end{aligned}$$

o sigui,

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq\\ &\quad \geq 3abc+(b+c)\sqrt{a^2bc}\\ &\qquad +(c+a)\sqrt{ab^2c}+(a+b)\sqrt{abc^2}\,,\end{aligned}$$

que dóna

$$\begin{aligned}&\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{\sqrt{abc}}\\ &\quad \geq \sqrt{abc}+(b+c)\sqrt{a}+(c+a)\sqrt{b}\\ &\qquad +(a+b)\sqrt{c}+2\sqrt{abc}\,,\end{aligned}$$

i, amb més operacions,

$$\begin{aligned}&(a+b+c)\left(\frac{ab}{\sqrt{abc}}+\frac{bc}{\sqrt{abc}}+\frac{ca}{\sqrt{abc}}\right)\\ &\quad \geq \sqrt{abc}+\sqrt{a}\left(c+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\right)\\ &\quad +\sqrt{b}\left(\sqrt{ab}+c+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right).\end{aligned}$$

Finalment,

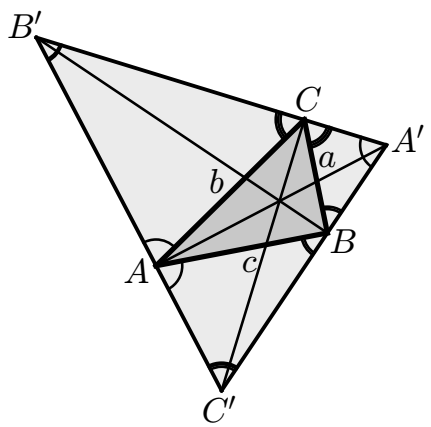
$$\begin{aligned}&(a+b+c)\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)\\ &\geq \sqrt{abc}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ab}+c+\sqrt{ac}\right)\end{aligned}$$

$$= \sqrt{abc} + \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)$$

i la demostració és completa.

A119. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, de l'INS de Cassà de la Selva.)
Per cada vèrtex d'un triangle $\triangle ABC$ d'àrea S, tracem la perpendicular a la bisectriu que passa per aquest vèrtex, tot formant així un nou triangle $\triangle A'B'C'$ d'àrea S'. Trobeu S/S'.

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Posarem a, b, c per indicar els costats del triangle $\triangle ABC$ oposats respectivament als vèrtexs A, B, C. El semiperímetre serà s. Amb R indiquem el radi de la circumferència circumscrita.



L'àrea del triangle $\triangle A'BC$ (vegeu la figura) en funció del costat BC i els seus angles contigus és

$$[A'BC] = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right)\sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)}{\sin\left(180^\circ - \left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)\right)},$$

això és,

$$[A'BC] = \frac{1}{2}a^2 \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

o, equivalentment,

$$[A'BC] = 2aR\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad (*)$$

ja que $a = 2R\sin A$, i $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$. Si ara fem servir a $(*)$ les expressions de $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$ i $\cos\frac{C}{2}$ en funció dels costats del triangle $\triangle ABC$ (fórmules de Briggs: $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$, etc.) obtenim:

$$[A'BC] = 2aR\frac{s(s-b)(s-c)}{abc},$$

i com que $abc = 4RS$, i $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ (fórmula d'Heró), resulta

$$[A'BC] = \frac{aS}{2(s-a)}.$$

Canviant a per b i per c, s'obtenen les fórmules que donen les àrees dels triangles $\triangle B'CA$ i $\triangle C'AB$:

$$[B'CA] = \frac{bS}{2(s-b)} \quad \text{i} \quad [C'AB] = \frac{cS}{2(s-c)}.$$

Ara, atès que $[A'B'C'] = [ABC] + [A'BC] + [B'CA] + [C'AB]$, tindrem

$$S' = S + \frac{S}{2}\left(\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c}\right)$$

i, atès que

$$\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} = \frac{4R-2r}{r}$$

(vegeu Mitrinovic, D. S., Pecaric, J. E. & Volenec, V., *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer, 1989, capítol IV, (22), p. 54.), on r és el radi de la circumferència inscrita en el triangle $\triangle ABC$, tenim que

$$S' = S\left(1 + \frac{2R-r}{r}\right) = \frac{2RS}{r}$$

i, finalment,

$$\frac{S}{S'} = \frac{r}{2R}.$$

Comentari: Com que $R \geq 2r$ (Euler), resulta $\frac{S}{S'} \leq \frac{1}{4}$ i es compleix la igualtat si, i només si, el triangle $\triangle ABC$ és equilàter.

A120. (Proposat per Enric Ventura i Capell, UPC, Manresa.)
Tenim un recinte quadrat com el de la figura 1, amb quatre gats situats a les cantonades, G_1, G_2, G_3 i G_4, i un ratolí al centre, R. El ratolí es pot moure lliurement per tot el pla a una velocitat màxima V_r, mentre que els gats només

poden córrer per les quatre arestes del quadrat i a una velocitat màxima de V_g. El ratolí salvarà la vida si aconsegueix sortir fora del quadrat sense que dos gats el toquin simultàniament. Si diem $\alpha = V_g/V_r \geq 0$ a la relació entre velocitats màximes, trobeu el valor crític $\alpha_0 \in \mathbf{R}$ que fa que el ratolí es pugui escapar si, i només si, $\alpha < \alpha_0$.

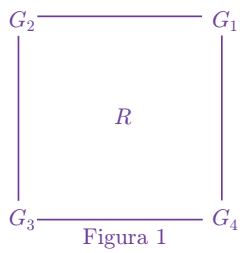


Figura 1

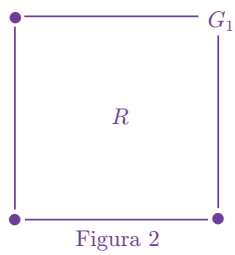


Figura 2

Ara tenim el ratolí al punt R i només un gat al punt G_1 (figura 2); i també es tracta que el ratolí s'escapi fora del quadrat sense ser caçat pel gat (en aquest cas només un). Demostreu que si $\alpha < \sqrt{2} + \sqrt{6}$ el ratolí té una estratègia per escapar.

Solució: (Solució de Gerard Planes Conangla, UPC, Barcelona.)

1. Per comoditat, suposarem que $V_r = 1$ i $V_g = \alpha$. Si el ratolí es dirigeix en línia recta i des del primer instant cap a un dels vèrtexs (per simetria, podem suposar el de coordenades $(0,0)$), per tal que els gats puguin atraparlo, a banda del gat que ja es trobava a $(0,0)$ des del començament, almenys un altre gat ha d'arribar-hi al mateix temps o abans que el ratolí, i això no serà possible si $\alpha < \sqrt{2}$. Vegem, doncs, que $\alpha_0 = \sqrt{2}$ és el valor límit, és a dir, que els gats tenen una estratègia senzilla per atrapar el ratolí si la seva velocitat és justament $\sqrt{2}$. En aquesta estratègia els gats es comportaran seguint els principis següents:

1*a*) Cada gat només es mourà per les dues arestes secants al vèrtex on es trobava inicialment.

1*b*) Dins d'aquestes arestes, la seva posició serà la indicada en el dibuix de la figura 3.

Així, dos gats G_i i G_{i+1} tindran, dins d'aquestes dues arestes de moviment, la mateixa posició x i y que prengui el ratolí, mitjançant les coordenades diagonals indicades al dibuix (indicat amb G_x i G_y respectivament). La velocitat de cada gat, doncs, serà màxima quan el ratolí es mogui sobre el seu eix (direcció paral·lela a una de les dues diagonals), i basta que la velocitat de cada gat sigui $\alpha = \sqrt{2}$ per poder tenir sempre la mateixa coordenada x o y que el ratolí.

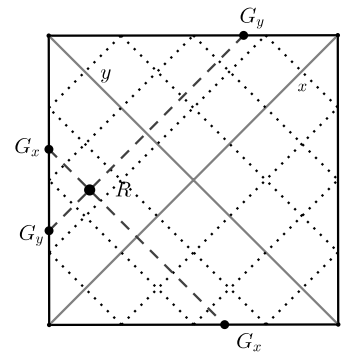


Figura 3

Com que els gats podran mantenir d'aquesta manera les coordenades del ratolí, si aquest decideix sortir del quadrat, al moment de creuar l'aresta col·lidirà amb dos gats (un de tipus G_x i l'altre de tipus G_y) que tindran la seva mateixa posició, i el ratolí serà caçat.

Considerem ara el cas del gat únic. Podem suposar sense perdre generalitat que el quadrat té costat de mida 2α. Descriurem a continuació l'estratègia del ratolí:

2*a*. Comença aproximant-se al gat per la diagonal fins que arriba al vèrtex d'un quadrat interior de costat $2 - \epsilon$ (situació del primer dibuix). Notem que sobre aquest quadrat el ratolí s'hi mou (proporcionalment) lleugerament més ràpid que el gat sobre el quadrat exterior.

2.*b* Un cop en aquesta situació, el ratolí comença a desplaçar-se pel perímetre del quadrat interior en sentit antihorari. El gat el pot perseguir o no fer-ho però, en qualsevol cas, eventualment s'arribarà a la situació indicada al segon dibuix (o a alguna de simètrica o rotada un múltiple de 90°), amb el gat en algun punt del segment AB, ja que el ratolí va més ràpid que el gat.

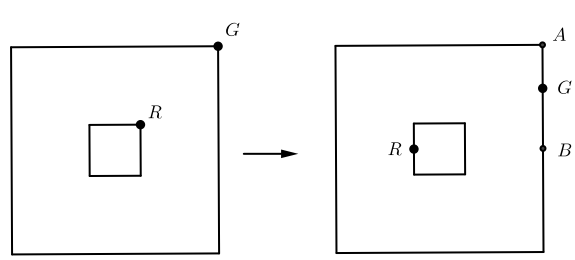


Figura 4

2*c*. En aquest moment, el ratolí haurà d'intentar sortir del quadrat pel camí més curt (és a dir, seguint la paral·lela al costat del quadrat). El ratolí es trobarà d'aquesta manera a una distància $\alpha - 1 + \epsilon$ de l'aresta i, per tant, necessitarà $\Delta t = \alpha - 1 - \epsilon$ per sortir. El gat, en el

pitjor cas per al ratolí, es trobarà al punt A, de manera que haurà de recórrer una distància 3α, i tardarà $\Delta t = 3$ a arribar a la posició del ratolí. Així doncs, per tal que el gat pugui atrapar el ratolí cal que $\alpha - 1 + \epsilon \geq 3$ i, com que ϵ pot ser tan petit com hom vulgui, el gat haurà de tenir una velocitat mínima de 4 ($4 > \sqrt{2} + \sqrt{6} \simeq 3.86$) per assegurar que pot atrapar el ratolí. Altrament, el ratolí tindrà una estratègia per escapar.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Matemots

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (vegeu l'article introductori al núm. 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.
Exemple «Exclous l'ús de coordenades al pla» (9 lletres). La resposta és «descartes», ja que descartar és una forma d'excloure, i René Descartes fou un dels matemàtics que va introduir l'ús de coordenades al pla o a l'espai.
En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.[4]

1. Pot ser afí, projectiva o euclidiana, i diuen que requisit per entrar a l'*Ακαδημία* (9 lletres).
2. Derivada que no s'entén prou a l'examen de mig curs (7 lletres).
3. Diferència entre Cauchy i Schwarz al voltant del producte escalar (11 lletres).
4. Varietat de maneres de representar el factorial (5 lletres).
5. Incitació a provar $P(n)$ per a tota n (8 lletres).
6. Ho poden ser les àlgebres, i també les ulleres (9 lletres).
7. Entoni correctament mentre parla de la classificació de les corbes algebraiques (6 lletres).
8. Functor que mesura la resistència dels estudiants a entendre l'àlgebra homològica (3 lletres).

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

[4] Respostes als matemots: 7. mòduli 4. gamma 1. geometria 3. desigualtat 8. Hom 5. inducció 6. graduades 2. parcial